セクター理論に基づくデータ解析と対称性 (量子論における統計的推測の理論と応用)

AUTHOR(S):

岡村, 和弥

数理解析研究所講究録
第 1834 巻 2013 年 89-95

セクター理論に基づくデータ解析と対称性

京都大学数理解析研究所 D2
岡村 和弥[1]

1 はじめに

量子系のデータ解析の根底にあるものはなにか？本稿の内容はすでに幾つかの報告集に掲載されている記事 [24, 25, 26] と重複するものであるため，簡潔な記述にとどめ，物理的意味を重点的に解説する。特に，物理的に重要な仮定・概念は公理として扱う。公理的扱いによって論理順序は明確になると信じている。本稿では測定理論 [6, 13, 16] に言及しないため，現実的状況への応用に対する興味のある方は，詳しい記述のある [24] を参照していただきたい。

2 量子論の代数的定式化とセクター概念

まず，C*-代数とその上の状態について定義を行う。本稿に関連する作用素環論の詳細事項については [2, 19, 20] を参照していただきたい。

1 (C*-代数). C*-代数 $\mathcal{X}$ とは対合 $*:\mathcal{X}\ni A\mapsto A^{*}\in\mathcal{X}$ をもつ代数であって，$\|A^{*}A\|=\|A\|^{2}$ をみたすノルム $\|\cdot\|$ をもつ Banach 空間のことを意味する。本稿では単位元 1 を持つことを仮定する。

2 (状態). $\mathcal{X}$ 上の状態 ω とは，ω は線型汎関数であって，$\omega(A^{*}A)\geq 0$ および $\omega(1)=1$ を満たすもののことである。$E_{\mathcal{X}}$ で $\mathcal{X}$ 上の状態全体を表す。状態とは，非可換代数上に一般化された期待値を与える汎関数 (期待値汎関数) である，と了解できる。

これらの数学的概念に基づいて物理的概念を掘り下げていこう。物理系の指定を行う際,「対象系はどのような物理量を測定可能か？」という点が最も重要であり，物理量によって物理系が指定されていると見做してよい。この観点から物理量を数学的概念による統制を行うために用いるのが *-代数[2]の概念である。非可換性の由来は物理系の動力学に任せるとして，物理量の多項式を扱う目的からは物理量に代数演算が許されるのはとても自然で[3]，C*-代数は連続関数算法 (continuous functional calculus) まで可能な *-代数中でもとても理想的な部類である。

一方の状態概念は物理系が置かれている実験設定・測定状況を与えるために不可欠な概念である。定量的には，物理量代数の上で定義される期待値汎関数として状態が定められている通り，状態はあらゆる物理量の平均値 (測定値の平均) を指定することに対応する。2 つの状態に対し，1 つでも出力が異なる物理量があればその 2 つは異なる状態である。

以上の議論をまとめて，次の公理を要請しよう：

---

[1]連絡先 kazuqi@kurims.kyoto-u.ac.jp
[2]対合演算 $*:A\mapsto A^{*}$ で閉じた代数。
[3]この観点の重要性については小嶋泉先生 (京大数理研) と西郷甲矢人氏 (長浜バイオ大学) から教えていただいた。

公理 1 (物理量と状態). 物理系の物理量のなす代数は C^*-代数 $\mathcal{X}$ によって与えられる。そして，物理系の実験設定・測定状況は $\mathcal{X}$ 上の状態 ω を与えることに指定される。

任意の $\omega \in E_{\mathcal{X}}$ に対し，Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\omega$, 単位ベクトル $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ と $\mathcal{X}$ から $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_\omega)$ への表現 π_ω で $\omega(A) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle$, $\mathcal{H}_\omega = \overline{\pi_\omega(\mathcal{X})\Omega_\omega}$ を満たす 3 つ組 $\{\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega\}$ を $\mathcal{X}$ の ω に伴う GNS 表現と呼ぶ。GNS 表現は状態に対してユニタリー同値を除いて一意に定まる。このとき，$\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X}) = \pi_\omega(\mathcal{X})'' \cap \pi_\omega(\mathcal{X})'$ [4]を von Neumann 代数[5]$\pi_\omega(\mathcal{X})''$ の中心と呼ぶ。状態 ω は自明な中心 $\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X}) = \mathbb{C}1$ をもつとき，因子と呼ばれる。因子状態の全体を $F_{\mathcal{X}}$ で表す。2 つの状態 π_1, π_2 は (直和による) 多重度を無視したユニタリー同値にあるとき準同値であると呼ばれ，$\pi_1 \approx \pi_2$ と表す。因子状態の準同値類を**セクター** (sector)[11, 12, 13] と呼ぶ。各々のセクターはそれぞれ 1 つの表現を単位としてつくられる直和表現によって構成されており，セクターが異なればそこには繋絡作用素 (intertwining oprator) が存在しない。本稿では以下の公理を認める：

公理 2 (セクター). 状態のマクロな基本単位はセクターによって与えられる。

セクターはマクロに見て異なる構造の分類指標の一単位である。一般化された熱力学的純粋相および確率論での根源事象の統合概念であって，ミクロから創発する動的な背景を持ちながら熱力学的な安定性に支えられており，マクロな一単位であってミクロな内部構造も含んでいる。とはいえ，今現在セクターを単に定めただけであり，実際に利用するためには指定された状態と各セクターとの対応関係をつけなければならない。そのために次章では状態の積分分解について説明し，セクターに関わる状態の積分分解について測度論的確率論の立場から正当化する。

3　セクター，中心分解と確率則

本章で用いられる用語の定義については [2] を参照していただきたい。$\omega \in E_{\mathcal{X}}$ に対し，$E_{\mathcal{X}}$ 上の正則 Borel 測度 μ で

$$\omega(X) = \int_{E_{\mathcal{X}}} \rho(X)\, d\mu(\rho)$$

を満たすものを ω の重心測度と呼ぶ。また，μ を $E_{\mathcal{X}}$ 上の正則 Borel 測度とするとき，$b(\mu)$ で μ の重心を表す。また，**直交測度** (orthogonal measure) とは任意の $\Delta \in \mathcal{B}(E_{\mathcal{X}})$ に対し

$$\left(\int_\Delta \rho\, d\mu(\rho) \right) \perp \left(\int_{E_{\mathcal{X}} \setminus \Delta} \rho\, d\mu(\rho) \right)$$

となる正則 Borel 測度のことである。ω を重心とする直交測度の全体を $\mathcal{O}_\omega(E_{\mathcal{X}})$ と表す。次の冨田分解定理が状態の直交測度に対する物理的意味を与える：

定理 1 (冨田分解定理 [2]). 任意の状態 $\omega \in E_{\mathcal{X}}$ に対し，次の 3 つは一対一対応する：
(a) $\mu \in \mathcal{O}_\omega(E_{\mathcal{X}})$;

---

[4]ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素の全体 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 S に対し，その可換子 S' を $S' = \{A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) | AB = BA, B \in S\}$ で定める。また，$S'' := (S')'$ を S の再可換子と呼ぶ。

[5]ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ とは，$\mathcal{M}$ は有界線型作用素の全体 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の共役演算で閉じた部分代数であって，$\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ を満たすものである。

(b) 可換 *von Neumann* 代数 $\mathfrak{B} \subseteq \pi_\omega(\mathcal{X})'$;
(c) 次を満たす $\mathcal{H}_\omega$ 上の射影作用素 P :　$P\Omega_\omega = \Omega_\omega, P\pi_\omega(\mathcal{X})P \subseteq \{P\pi_\omega(\mathcal{X})P\}'$.

$\mu, \mathfrak{B}, P$ は上の対応をもつとき次の関係が成り立つ：
(1) $\mathfrak{B} = \{\pi_\omega(\mathcal{X}) \cup P\}'$; (2) $P = [\mathfrak{B}\Omega_\omega]$;
(3) $\mu(\widehat{A}_1\widehat{A}_2\cdots\widehat{A}_n) = \langle\Omega_\omega|\pi_\omega(A_1)P\pi_\omega(A_2)P\cdots P\pi_\omega(A_n)\Omega_\omega\rangle$;
(4) $\mathfrak{B}$ は

$$\langle\Omega_\omega|\kappa_\mu(f)\pi_\omega(A)\Omega_\omega\rangle = \int d\mu(\rho)\ f(\rho)\ \widehat{A}(\rho)$$

で定められる写像 $L^\infty(\mu) := L^\infty(E_\mathcal{X}, \mu) \ni f \mapsto \kappa_\mu(f) \in \pi_\omega(\mathcal{X})'$ の値域に $*$-同型であり，$A, B \in \mathcal{X}$ に対し次が成り立つ：

$$\kappa_\mu(\widehat{A})\pi_\omega(B)\Omega_\omega = \pi_\omega(B)P\pi_\omega(A)\Omega_\omega.$$

$\mathfrak{B} = \mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X})$ に対応する直交測度 μ を**中心測度** (central measure) と呼び，μ_ω あるいは $d\omega$ と表す。そして $\mathfrak{B}$ が中心 $\mathfrak{Z}_\psi(\mathcal{X})$ の部分代数であるとき，μ は**準中心測度** (subcentral measure) と呼ばれる。$\mathfrak{B}$ に対応した準中心測度を $\mu_{\omega,\mathfrak{B}}$ もしくは $d^\mathfrak{B}\omega$ と表す。中心測度は $F_\mathcal{X}$ に準台をもち，中心測度は状態をセクターへと分解する唯一の重心測度である。物理的には，中心測度が中心に対応した状態の直交分解であることから了解されるように，中心 $\mathfrak{Z}_\omega(\mathcal{X})$ があらゆる物理量と可換な物理量の極大系であって，これを用いることによりこの状態 (およびその GNS 表現) を用いて指定できる限りの実験 (測定) 状況で共通のパラメータで状態を分解できるということを意味している。準中心分解とはこの観点から中心測度より“粗い”分解であり，ある程度セクターを“束”にしてまとめて扱う場合に対応している。

公理 3 (中心測度と確率則 [16, 25])**.** 物理量代数が $\mathcal{X}$，状態が $\omega \in E_\mathcal{X}$ であるとする。このとき，$\Delta \in \mathcal{B}(E_\mathcal{X})$ に属するセクターが確率は $\mu_\omega(\Delta)$ で与えられる。

この公理を認めることで先の議論が測度論的確率論の現実的な状況 (測定過程等) への応用の可能性が生まれる。次章では実際に (準) 中心測度を活用していこう。

4　相対エントロピーの定義と日合・大矢・塚田の定理

$M_1(\Omega)$ によって $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度の空間を表す。確率測度 $\nu \in M_1(\Omega)$ の $\mu \in M_1(\Omega)$ に対する相対エントロピーを

$$D(\nu\|\mu) = \begin{cases} \displaystyle\int d\nu(\rho)\log\frac{d\nu}{d\mu}(\rho) & (\nu \ll \mu) \\ +\infty & (\text{otherwise}). \end{cases} \tag{1}$$

で定める。$\nu, \mu \ll \sigma$ となる Ω 上の測度 σ が存在するとき，$D(\nu\|\mu)$ のかわりに $D(q\|p)$ で表す。ただし，$q := \dfrac{d\nu}{d\sigma}$ and $p := \dfrac{d\mu}{d\sigma}$ である。

これから，荒木と Uhlmann による相対エントロピーを定義しよう [1, 21, 9, 23, 18]。$(\mathcal{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{P})$ を von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ の標準形[6]とし，φ, ψ を $\mathcal{M}$ 上の正規状態とする。

[6]Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ の標準形とは $\mathcal{M}$，$\mathcal{H}$ および以下の条件を満たすユニタリー対合 J と $\mathcal{H}$ 上の自己双対錐 $\mathcal{P}$ からなる 4 つ組 $(\mathcal{M}, \mathcal{H}, J, \mathcal{P})$ のことである : (i) $J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'$; (ii) $JAJ = A^*$, $A \in \mathfrak{Z}(\mathcal{M})$; (iii) $J\xi = \xi$, $\xi \in \mathcal{P}$; (iv) $AJAJ\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{M}$. 詳しくは [20] を参照して頂きたい。

任意の $A \in \mathcal{M}$ に対し，$\varphi(A) = \langle\Phi|A\Phi\rangle, \psi(A) = \langle\Psi|A\Psi\rangle$ を満たす $\Phi, \Psi \in \mathcal{P}$ が存在する。定義域を $\mathrm{dom}(S_{\Phi,\Psi}) = \mathcal{M}\Psi + (1 - s^{\mathcal{M}'}(\Psi))\mathcal{H}$ とする作用素 $S_{\Phi,\Psi}$ を

$$\begin{aligned} S_{\Phi,\Psi}(A\Psi + \Omega) &= s^{\mathcal{M}}(\Psi)A^*\Phi, \\ A \in \mathcal{M}, &\qquad s^{\mathcal{M}'}(\Psi)\Omega = 0, \end{aligned}$$

で定める。ここで，$s^{\mathcal{M}}(\Psi)$ は Ψ の $\mathcal{M}$-台，すなわち，E は $(1-E)\Psi = 0$ を満たす $\mathcal{M}$ の最小の射影である。$S_{\Phi,\Psi}$ は可閉作用素であるとわかる。このとき，相対モジュラー作用素 $\Delta_{\Phi,\Psi}$ を $\Delta_{\Phi,\Psi} = (S_{\Phi,\Psi})^*\overline{S_{\Phi,\Psi}}$ で定め，$\Delta_{\Phi,\Psi} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_{\Phi,\Psi}(\lambda)$ を $\Delta_{\Phi,\Psi}$ のスペクトル分解とする。荒木の相対エントロピーは $S(\varphi\|\psi)_{\mathrm{Araki}}$ を

$$S(\varphi\|\psi)_{\mathrm{Araki}} = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \log\lambda\, d\langle\Phi|E_{\Phi,\Psi}(\lambda)\Phi\rangle, & (s(\varphi) \le s(\psi)), \\ \qquad +\infty, & (\text{その他}). \end{cases}$$

で定める。ここで，$s(\varphi)$ は $\mathcal{M}$ の $\varphi(1-E) = 0$ を満たす最小の射影 E であり，φ の台と呼ばれる。

次に Uhlmann の相対エントロピーを定義しよう。こちらが 2 次形式によるエントロピーの定式化となる。複素線型空間 $\mathcal{L}$ 上の半ノルム p と q に対し，2 次平均 (quadratical mean) $QM(p,q)$ を

$$QM(p,q)(x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{S}(p,q)} \alpha(x,x)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathcal{L},$$

で定める。ここで，$\mathcal{S}(p,q)$ は $\mathcal{L}$ 上の正値エルミート形式 α であって，任意の $x, y \in \mathcal{L}$ に対して $|\alpha(x,y)| \le p(x)q(y)$ が成り立つものの全体である。$\mathcal{L}$ 上の半ノルムに値をとる関数 $[0,1] \ni t \mapsto p_t$ は次の条件を満たすとき，p から q への 2 次補間 (quadratical interpolation) と呼ぶ：

(i) 各 $x \in \mathcal{L}$ に対し，関数 $t \mapsto p_t(x)$ は連続；

(ii) 次の条件を満たす；

$$\begin{aligned} p_t &= QM(p_{t_1}, p_{t_2}), \ t = \frac{t_1 + t_2}{2}, t_1, t_2 \in [0,1], \\ p_{\frac{1}{2}} &= QM(p,q), \\ p_{\frac{t}{2}} &= QM(p, p_t), \ t \in [0,1], \\ p_{\frac{1+t}{2}} &= QM(p_t, q), \ t \in [0,1]. \end{aligned}$$

更には，正値エルミート形式 α と β に対し $\mathcal{L}$ 上の正値エルミート関数に値をとる関数 $[0,1] \ni t \mapsto QF_t(\alpha,\beta)$ が存在し，各 $x \in \mathcal{L}$ に対し $p_t(x) = QF_t(\alpha,\beta)(x,x)^{\frac{1}{2}}$ によって定められる関数 p_t は $\alpha(x,x)^{\frac{1}{2}}$ から $\beta(x,x)^{\frac{1}{2}}$ への 2 次補間となる。α と β の相対エントロピー汎関数 (relative entropy functional) $S(\alpha\|\beta)(x)$ を

$$S(\alpha\|\beta)(x) = -\liminf_{t \to +0} \frac{QF_t(\alpha,\beta)(x,x) - \alpha(x,x)}{t}.$$

で定める。

$\mathcal{A}$ を *-代数とし，φ, ψ を $\mathcal{A}$ 上の正値線型汎関数とする。Uhlmann の相対エントロピー $S(\varphi\|\psi)_{\mathrm{Uhlmann}}$ を

$$S(\varphi\|\psi)_{\mathrm{Uhlmann}} = S(\varphi^R\|\psi^L)(1),$$

で定める。ここで，φ^R and ψ^L は $\varphi^R(A,B)=\varphi(BA^*)$, $\psi^L(A,B)=\psi(A^*B)$ によって定義される $\mathcal{A}$ 上の正値エルミート形式である。

[9] において，次の 2 つの重要な定理が証明された：

定理 2. *von Neumann* 代数 $\mathcal{M}$ 上の任意の状態 φ,ψ に対し，$S(\varphi\|\psi)_{\mathrm{Uhlmann}}=S(\varphi\|\psi)_{\mathrm{Araki}}$ が成り立つ。

ゆえに，以後 2 つの相対エントロピーを区別せず，ともに量子相対エントロピーと呼ぶこととする。また，C*-代数での量子相対エントロピーと von Neumann 代数での量子相対エントロピーの関係として次の定理が成立する：

定理 3. φ,ψ を C^*-代数 $\mathcal{X}$ の状態とし，π をある *Hilbert* 空間上の $\mathcal{X}$ の非縮退表現[7]とする。$\varphi(A)=\tilde{\varphi}(\pi(A))$, $\psi(A)=\tilde{\psi}(\pi(A))$ を満たす $\varphi,\psi\in E_{\mathcal{X}}$ の $\pi(\mathcal{X})''$ 上への正規拡張 $\tilde{\varphi},\tilde{\psi}$ があるとき，$S(\tilde{\varphi}\|\tilde{\psi})=S(\varphi\|\psi)$ が成り立つ。

本稿では π として $\varphi+\psi$ に伴う GNS 表現 $\pi_{\varphi+\psi}$ を用いる。セクター理論と量子相対エントロピーの関係は，上の 2 つの定理を利用することで証明される，次の**日合・大矢・塚田の定理** (Hiai-Ohya-Tsukada theorem) で尽きている：

定理 4 ([9, 23]). μ,ν を $\psi,\omega\in E_{\mathcal{X}}$ を重心とする $E_{\mathcal{X}}$ 上の正則 *Borel* 測度とする。$\mu,\nu\ll m$ となる $E_{\mathcal{X}}$ 上の準中心測度 m が存在するならば，$S(\psi\|\omega)=D(\mu\|\nu)$ が成立する。

すなわち，量子相対エントロピーは各状態に対応する重心測度に対する測度論的相対エントロピーに一致する。しかも，ある準中心測度 m の存在を仮定していることから了解されるように，セクター化可能な状況を基準として 2 つの状態を比較している。それ故に重心測度の評価が量子相対エントロピーの評価に直結する。特に，中心分解は物理的にもその意味が保障されており，状態の分解としても常に一意に存在する。その亜種としての準中心測度が量子測定理論の文脈から重要になる。当然ながら，同様の定理が量子 α-ダイバージェンスに対しても成立する。

5 Sanov の定理の量子版

大偏差原理 [3, 4, 5, 22] が決定的に重要なのは，大標本理論との関係から大量データが与えられた状況で，データ数 (サンプル数) が無限大になる極限における収束先と収束レートを見積もれる事実にある。それ故に量子推定理論においても大偏差型評価の必要性が叫ばれている。本稿では無視できない測度論的確率論の観点から古典的なデータ解析を扱う状況における大偏差型評価から量子状態の指定へとつながることを示す。それは Sanov の定理の量子版にあたり，量子相対エントロピーがレート関数であると判明する。

$\mathcal{B}^w(M_1(E_{\mathcal{X}}))$ を $M_1(E_{\mathcal{X}})$ 上の弱位相で生成される Borel 集合族とする。$\tilde{\rho}=(\rho_1,\rho_2,\cdots)\in(\mathrm{supp}\,\mu_\psi)^{\mathbb{N}}$ および $A\in\mathcal{B}(\mathrm{supp}\,\mu_\psi)$, $\Gamma\in\mathcal{B}^w(M_1(E_{\mathcal{X}}))$ に対し，

$$Y_j(\tilde{\rho})=\rho_j,\qquad L_n(\tilde{\rho},A)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{Y_j(\tilde{\rho})}(A),\qquad Q_n^{(2)}(\Gamma)=P_{\mu_\psi}(L_n\in\Gamma)$$

と定める。ただし，P_{μ_ψ} は直積測度 $\mu_\psi^{\mathbb{N}}$ を意味する。。$\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ が独立同分布であることは明らかであり，この $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ により状態を確率変数として扱うことが可能となる。このとき，Sanov の定理の量子版が成立する：

[7]非自明な固有空間がない表現のこと。

定理 5. $Q_n^{(2)}$ は $S(b(\cdot)\|\psi)$ をレート関数とする *LDP* を満たす：$\{L_n \in \Gamma\}$ が可測集合となる任意の $\Gamma \in B^w(M_1(E_{\mathcal{X}}))$ に対し，

$$-\inf\left\{S(b(\mu)\|\psi) \mid \mu \in \Gamma^o, \mu \ll \mu_\psi\right\} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n^{(2)}(\Gamma)$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n^{(2)}(\Gamma) \le -\inf\left\{S(b(\mu)\|\psi) \mid \mu \in \overline{\Gamma}, \mu \ll \mu_\psi\right\}.$$

ただし，上限と下限は集合 $\{\mu \in \Gamma \mid \mu \ll \mu_\psi\}$ が空のときは無限大の値をとることとする。

$\mathcal{X}$ は可分と仮定する。このとき，$E_{\mathcal{X}}$ は次で定義される距離 d によりコンパクト距離空間となる：

$$d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\omega_1(A_j) - \omega_2(A_j)|}{\|A_j\|}, \tag{2}$$

ただし，集合 $\{A_j \in \mathcal{X} \mid A_j \neq 0, j = 1, 2, \cdots\}$ は $\mathcal{X}$ の稠密な部分集合である。加えて，$B^{cy}(M_1(E_{\mathcal{X}}))$ ($M_1(E_{\mathcal{X}})$ 上の有界な Borel 可測関数による積分を行う汎関数を可測にするような筒集合が生成する Borel 集合族 [4]) が $B^w(M_1(E_{\mathcal{X}}))$ と一致する。故に，$\mathcal{X}$ が可分なときは任意の $\{L_n \in \Gamma\}$ が可測集合になる。

上の定理は本来測定過程を加味しなければならない。けれども，物理的・数学的な本質は先の提示で尽きている。測定相互作用と可測集合 Γ の扱いに注意する以外の差はない。他にも Stein の補題や Chernoff 限界などの古典的定理が同様に量子版へと移行可能である。これらの評価の証明は量子論と測度論的確率論のつながりを示すうえで重要な証拠となる。なぜなら，測度論的確率論の文脈における測定データの解析を通じて量子状態の指定につながる事実は統計学的概念の普遍性から大変自然であって，量子系といえども通常の科学的手順を基盤にしてしか理論で利用する諸概念の明確な位置づけを与えることは困難だからである。量子推定理論 [7, 8, 10] はこのような解析を前提として，非可換性と測定理論を背景に量子系特有の構造を利用する目的で築かれた理論である。物理量の間の非可換性は推定においては障害ともなりうるが，障害の克服が新たな概念・枠組みの提唱へとつながるため今後は量子推定理論の諸概念を見直すとともに，現代統計学の諸分野の研究を積極的に取り入れることに努めたい。[14, 15] において大偏差原理・学習理論 [22, 27] の観点からこの試みの一端を行った。

最後に，講演において発表できなかったセクター理論と対称性の関係について一言述べさせていただきたい。これまでの研究の蓄積により，セクターは対象系の物理量代数に作用する対称性により指定される，という事実が多くの系で知られている[8]。そのため，具体的な系におけるセクター理論的扱いのために物理量代数の表現の群作用を介した分類を取り込む必要がある。特に，破れた対称性に対するセクターの扱いなしに対称性の現実味のある運用は叶わない。またの機会にこの話題については発表する予定である。

参考文献

[1] H. Araki, Relative entropy for states of von Neumann algebras II. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **13** (1977), 173-192.

[8] 正確には，セクター理論の萌芽となる先行研究の結果とセクター理論の観点から過去の研究を整理したら，多くの系で対称性がセクターを指定する構造が浮かび上がってきた，という構図である。

[2] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* (vol. 1), Springer-Verlag (1979).

[3] I. Csiszár, A simple proof of Sanov's theorem, Bull. Brazilian Math. Soc. **37**, (2006) 453-459.

[4] A. Dembo and O. Zeitouni, *Large deviations techniques and applications* (2nd ed.), (Springer, 2002).

[5] R.S. Ellis, *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*, (Springer, 1985).

[6] R. Harada and I. Ojima, A unified scheme of measurement and amplification processes based on Micro-Macro Duality –Stern-Gerlach experiment as a typical example–, Open Sys. Inform. Dyn. **16**, 55-74 (2009).

[7] *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference*, edited by M. Hayashi (World Scientific, Singapore, 2005).

[8] C.W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory* (Academic Press, New York, 1976).

[9] F. Hiai, M. Ohya and M. Tsukada, Sufficiency and relative entropy in $*$-algebras with applications in quantum systems, Pacific J. Math. **107**, 117-140 (1983).

[10] A.S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[11] I. Ojima, Order Parameters in QFT and Large Deviation, RIMS Kokyuroku **1066** 121-132 (1998), (in Japanese), http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/62481/1/1066-10.pdf.

[12] I. Ojima, A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria -Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions-, Open Sys. Inform. Dyn. **10**, 235-279 (2003).

[13] I. Ojima,"Micro-Macro Duality in Quantum Physics", pp.143-161 in Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum (World Scientific, 2005), arXiv:math-ph/0502038.

[14] I. Ojima and K. Okamura, Open Syst. Inf. Dyn. **19**, 1250021 (2012).

[15] I. Ojima and K. Okamura, Open Syst. Inf. Dyn. **19**, 1250022 (2012).

[16] I. Ojima, K. Okamura and H. Saigo, in preparation.

[17] K. Okamura, The Quantum Relative Entropy as a Rate Function and Information Criteria, arXiv:1202.2943.

[18] M. Ohya and D. Petz, *Qunatum Entropy and Its Use*, (Springer, Berlin, 1993).

[19] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, (Springer, 1979).

[20] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras II*, (Springer, 2002).

[21] A. Uhlmann, Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory, Commun. Math. Phys. **54** (1977), 21-32.

[22] S. Watanabe, *Algebraic geometry and statistical learning theory*, (Cambridge University Press, 2009).

[23] 大矢 雅則, 梅垣 寿春,『確率論的エントロピー』,『量子論的エントロピー』, 共立出版, (1983, 1984).

[24] 小嶋 泉, 岡村 和弥, 大偏差戦略における逆問題と創発, 素粒子論研究 **119** No.4A (2012).

[25] 小嶋 泉, 岡村 和弥, 西郷 甲矢人, From Born rule to large deviations, 素粒子論研究・電子版 **13** (2012).

[26] 岡村 和弥, 量子相対エントロピーと統計的推測：仮説検定とモデル選択, 数理解析研究所講究録 **1820**, 102-103 (2013).

[27] 渡辺 澄夫,『ベイズ統計の理論と方法』, コロナ社, (2012).